

Chapitre n° 4 : Continuité et convexité

Terminales 3&9, spécialité mathématique, 2021-2022

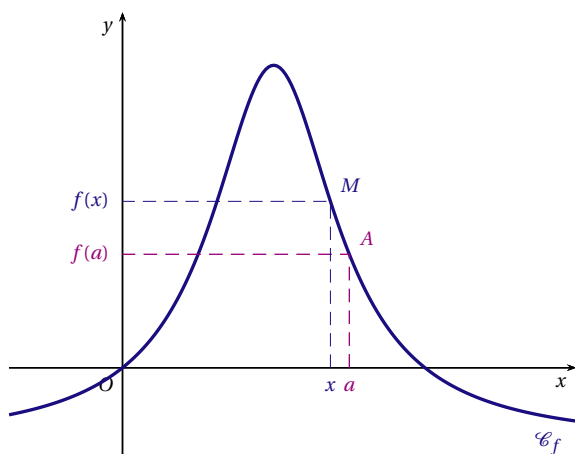
1 Continuité

Définition 1 (continuïté)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel a .
On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si

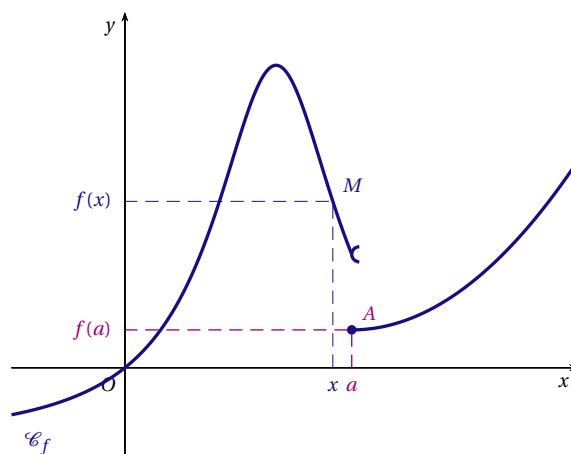
La fonction f est continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout point de I .

- Remarque 1.**
- ① Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I se traduit par une courbe « en un seul morceau », elle n'a pas de « sauts » en certaines valeurs.
 - ② Si une fonction est définie en $a \in I$, alors la continuité de f en a est équivalente à l'existence de la limite de f en a . Car, si f est définie en a , et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, alors nécessairement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
 - ③ On définit la continuité sur un intervalle fermé en prenant la limite à droite de la borne inférieure et la limite à gauche de la borne supérieure.



La fonction f est continue.

Pour tout réel a de I , on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a .



La fonction f n'est pas continue en a .

La courbe \mathcal{C}_f présente un saut au point d'abscisse a .
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a .

Exemple 1. Exercice 44 page 214

Propriété 2

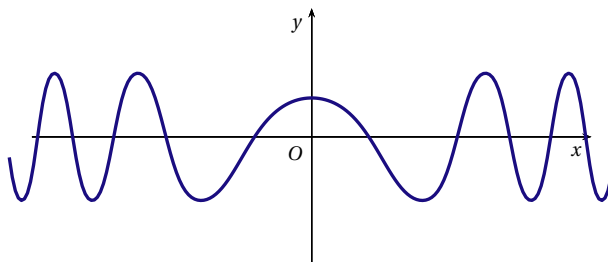
- ① Les fonctions puissance $x \rightarrow x^n$, $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur \mathbb{R} .
- ② La fonction inverse est continue sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* .
- ③ La fonction racine carrée $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- ④ La fonction exponentielle $x \rightarrow e^x$ est continue sur \mathbb{R} .
- ⑤ La fonction logarithme népérien $x \rightarrow \ln x$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- ⑥ Les fonctions $x \rightarrow \cos x$ et $x \rightarrow \sin x$ sont continues sur \mathbb{R} .
- ⑦ Toute fonction construite par somme, produit, quotient ou composition des fonctions précédentes sont continues **sur leur ensemble de définition**.

Exemple 2.

① Les fonctions polynômes et rationnelles sont

② La fonction $x \rightarrow |x| = \sqrt{x^2}$ est

③ La fonction $\sin(\cos(x^2 + 1))$ est continue sur \mathbb{R} comme composée de trois fonctions continues sur \mathbb{R}



Exemple 3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} (-x^2 + 2x + 1)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Propriété 3 (Continuité et dérivabilité)

Si une fonction est dérivable en a , alors elle est continue en a .

Si une fonction est dérivable sur un intervalle I , alors elle est continue sur I .

Preuve.

Remarque 2. Les réciproques sont fausses.

En effet $f : x \rightarrow |x|$ est continue non dérivable en 0.

Pour tout $h \neq 0$, on a $\tau(h) \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1 & \text{si } h < 0 \\ 1 & \text{si } h > 0 \end{cases}$

donc $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \tau(h) \neq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \tau(h)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Théorème 4 (Point fixe)

Soit (u_n) une suite définie par un premier terme et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$; et convergente vers un nombre réel ℓ .

Preuve.

Remarque 3. ① L'hypothèse de continuité est indispensable. Par exemple, considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction discontinue définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^n}$.

Donc (u_n) est convergente vers 0 et on n'a pas $f(0) = 0$

- ② Si les hypothèses du théorème du point fixe sont vérifiées et si l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions dans le domaine de continuité de f , alors la limite ℓ de la suite est l'une d'entre elles. Il faut un raisonnement supplémentaire pour savoir laquelle.

Exemple 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.

Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

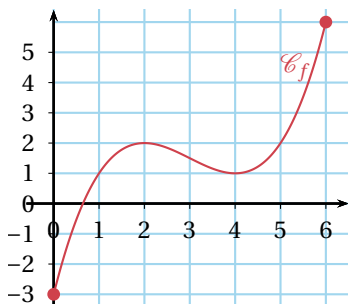
Exemple 5. Exercice 47 et 50 page 214

Théorème 5 (Valeurs intermédiaires)

Remarque 4. f prend au moins une fois toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a; b]$ et, sur $[a; b]$, la courbe représentative de f coupe la droite d'équation $y = k$ en un point au moins.

Exemple 6. Soit f la fonction définie sur $[0; 6]$ par $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



On dresse le tableau de variation de f .

f admet pour minimum -3 et pour maximum 6 .

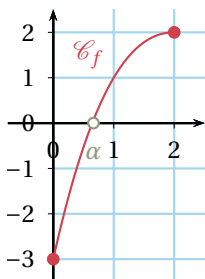
f est continue sur $[0; 6]$.

x	0	2	4	6
f	-3	2	1	6

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de $[-3; 6]$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0; 6]$.

Théorème 6 (Bijection)

Exemple 7. Reprenons la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{4} - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



x	0	α	2
f	-3	0	2

Sur $[0; 2]$, f est continue, strictement croissante et admet pour minimum -3 et maximum 2 .

Donc, f prend une fois, et une seule, toutes les valeurs intermédiaires entre -3 et 2 .

En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α entre 0 et 2.

Remarque 5. Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique aussi pour f continue sur un intervalle I de type : $[a; b],]a; b[,]a; b[,]a; +\infty[,]a; +\infty[,]-\infty; b]$ ou $]-\infty; b[,]-\infty; +\infty[$.

Si une borne a ou b de l'intervalle est ouverte, alors on remplace $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en cette borne; si une borne de l'intervalle est $\pm\infty$, alors on considère la limite de f en $\pm\infty$.

Exemple 8. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$.
 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β ($\alpha < \beta$), et que $\alpha \in]0; 1[$.
 Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

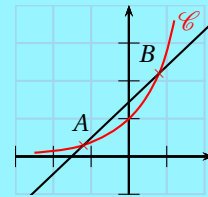
Exemple 9. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$.
 Écrire un programme python permettant de conjecturer l'éventuelle convergence de la suite.
 Démontrer cette conjecture.

Exemple 10. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \frac{10x}{e^x + 1}$.
 Dresser le tableau de variations de f .

2 Convexité

Définition 7 (Sécante)

Soient f une fonction et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
 Soient A et B deux points de \mathcal{C}_f .



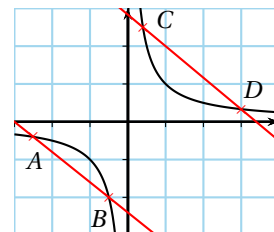
Définition 8 (Convexité et concavité)

Soient f une fonction et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On dit que :

- ①
- ② f est concave sur un intervalle I si, pour tout $x \in I$, \mathcal{C}_f est au dessus de ses sécantes (donc en dessous de ses tangentes).

Exemple 11.

- ① La fonction racine carrée est concave sur \mathbb{R}_+ .
- ② Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur \mathbb{R} .
- ③ La fonction inverse est convexe sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .



Propriété 9 (Opposé d'une fonction convexe ou concave)

f est une fonction convexe si et seulement si $-f$ est concave

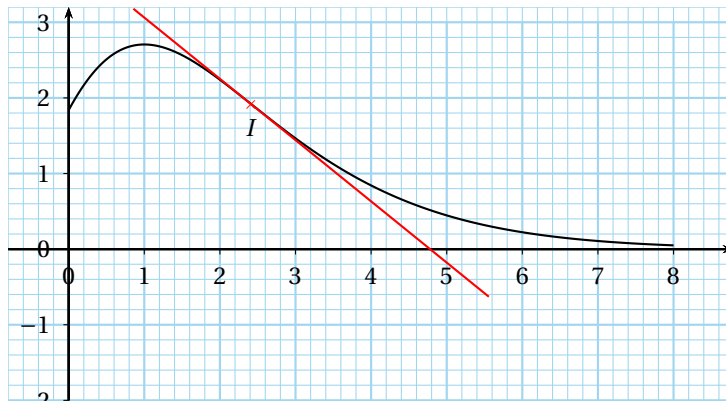
Exemple 12. $x \rightarrow -e^x$ est concave sur \mathbb{R} car $x \rightarrow e^x$ est convexe sur \mathbb{R}

Exemple 13.

On considère la fonction f définie sur $[0;8]$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concaves.

Sur $[0;2,4]$, \mathcal{C}_f est en dessous de ses tangentes donc f est convexe sur $[0;2,4]$.

Sur $[2,4;8]$, \mathcal{C}_f est au dessus de ses tangentes donc f est concave sur $[2,4;8]$.



Théorème 10 (Convexité, dérivée première et seconde)

Soit f une fonction définie, **deux fois dérivable**, sur un intervalle I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ① f est convexe sur I ② f' est croissante sur I ③ f'' est positive sur I ④ \mathcal{C}_f est située au dessus de ses tangentes

De même, ces propositions sont équivalentes : Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ① f est concave sur I ② f' est décroissante sur I ③ f'' est négative sur I ④ \mathcal{C}_f est située en dessous de ses tangentes

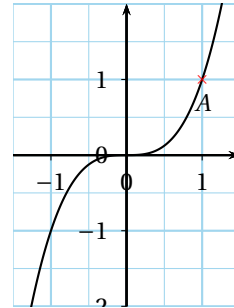
Preuve.

Définition 11 (Point d'inflexité)

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et \mathcal{C}_f sa courbe représentative sur cet intervalle.
Soit A un point de \mathcal{C}_f et T_A la tangente en ce point.

Exemple 14.

Soit f la fonction cube et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.
L'origine O du repère est un point d'inflexion, mais pas le point $A(1 : 1)$.

**Exemple 15.** Exercices « mentaux » 68 à 71 page 217**Propriété 12 (Point d'inflexion)**

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

①

②

Exemple 16. Soit f la fonction cube deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

$f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$, donc $f''(x) \geq 0 \iff x \geq 0$ et f'' change de signe en 0, donc $(0;0)$ est un point d'inflexion.

Exemple 17. Utiliser la dérivée seconde pour dresser un tableau de variations.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \sqrt{\frac{3x^2+2x+1}{x}}$.

Dresser le tableau de variations de f .

Exemple 18. Utiliser la convexité pour démontrer des inégalités.

Exercices 89 à 94 page 219